NOM:___________________________COGNOM:____

Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.

Problema 1 (Bloc C)

La botiga FRUITES SELECTES ha decidit oferir els seus serveis per internet amb el lliurament de comandes a domicili. Per facilitar la informació a l'usuari, cada producte tindrà a la web una indicació del pes esperat de cada fruita. Un dels productes estrella és la Poma Fuji extra i, per a la posada en marxa de la iniciativa, els propietaris volen fer un estudi per trobar el pes que hauran d'indicar en aquest cas. Per a fer-ho trien una mostra de 30 pomes a l'atzar i en recullen el pes en grams:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 8484.7835 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 2404449.54$$

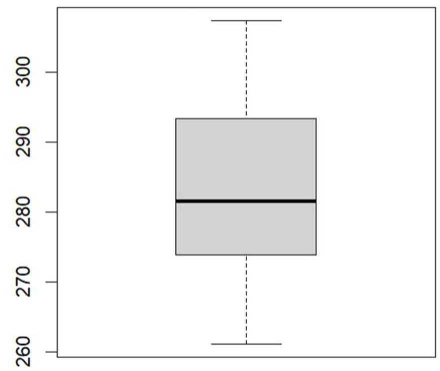
1. A partir de les dades anteriors, doneu una estimació puntual de la mitjana del pes (X) en grams de les pomes Fuji extra. Doneu també l'error tipus d'aquesta estimació. (1 punt)

$\bar{X} = \frac{8484.7835}{30} = 282.8261$ i $s_X^2 = \frac{2404449.54 - \frac{8484.7835^2}{30}}{29} = 163.1439$ $s_X = 12.7728$

I per tant, se = 12.7728/ $\sqrt{30}$ = 2.3320

2. A la dreta s'adjunta el boxplot de les dades de la mostra. Empleneu la següent taula de manera aproximada. (1 punt)

	Mínim	1r Quartil	Mediana	3r Quartil	Màxim
Pes pomes (g)	261.17	274.11	281.48	293.30	307.47



3. Calculeu un interval de confiança al 95% per a la mitjana del pes de les pomes Fuji extra i interpreta el resultat tenint en compte que s'està valorant publicar en el web que el pes mitjà d'una poma Fuji extra és de 280 g (1.5 punts)

$IC(\mu_X, 95\%) = (\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}, \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}) =$

En el nostre cas es té que $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{29,0'975}$ = 2.04523 (qt(0.975,29)= 2.0452)

$= (282.8261 - 2.04523 \cdot \sqrt{\frac{12.7728^2}{30}}, 282.8261 + 2.04523 \cdot \sqrt{\frac{12.7728^2}{30}}) = (278.0566, 287.5955)$

A partir de l'IC calculat és versemblant considerar que el valor esperat del pes de les pomes sigui 280 g amb un 95% de confiança.

4. Es vol també estudiar quina és la variància de les pomes Fuji. Calcula un interval de confiança al 95% per a la variància i interpreta'n el resultat. (1,5 punts)

$$IC(\sigma_X^2, 95\%) = \left(\frac{s_X^2\cdot(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{s_X^2\cdot(n-1)}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) = \left(\frac{163.1439\cdot 29}{\chi^2_{29,0.975}}, \frac{163.1439\cdot 29}{\chi^2_{29,0.025}}\right) = \left(\frac{163.1439\cdot 29}{45.722}, \frac{163.1439\cdot 29}{16.047}\right) =$$

(qchisq(0.975,29)=45.722 ,qchisq(0.025,29)=16.047)

= (103.48, 294.83)

La desviació estarà entre 10,17 i 17.17 g amb confiança del 95%

Com a informació per al consumidor, es vol estudiar si les pomes Golden tenen el mateix pes esperat que les pomes Fuji extra. Per això s'agafa una mostra a l'atzar de 30 pomes Golden i es vol estudiar la diferència de mitjanes entre el pes de pomes Fuji i el pes de les pomes Golden. Les dades per les pomes Golden (G) són les següents:

$$\sum_{i=1}^{30} g_i = 7224.7357 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{30} g_i^2 = 1746268.3350$$

5.- Indiqueu de manera justificada si s'ha fet un disseny amb dades independents o amb dades aparellades (0.5 punts)

Independents perquè cada poma és d'un determinat tipus.

6.- Calculeu un IC de la diferència de mitjanes amb una confiança del 95% i interpreteu-ne el significat. (2 punts)

Pomes Fuji (ja calculat): $\bar{X} = 282.8261$ i $s_X^2 = \frac{2404449.54 - \frac{8484.7835^2}{30}}{29} = 163.1439$, $s_X = 12.7728$

Pomes Golden: $\bar{G} = \frac{7224.7357}{30} = 240.8245$ i $s_G^2 = \frac{1746268.3350 - \frac{7224.7357^2}{30}}{29} = 219.8208$, $s_G = 14.8264$

$s^2 = \frac{(n1-1)\cdot sx^2 + (n2-1)\cdot sG^2}{(n1+n2-2)} = \frac{29\cdot 163.1439 + 29\cdot 219.8208}{58} = 191.4824$ i $s=13.8377$

$se = 13.8377 \cdot \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{30}} = 3.5729$

I per tant, $IC(\mu_X - \mu_G, 95\%) = (\bar{x} - \bar{G} - t_{n1+n2-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot se, \bar{x} - \bar{G} + t_{n1+n2-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot se)$

= (34.8497, 49.1535) (usant `qt(0.975,58) = 2.002`)

No és versemblant considerar que les pomes Fuji i les pomes Golden tenen el mateix pes. Amb un 95% de confiança les pomes Fuji pesen 42 g més amb aquesta diferència de pes estant entre 34.9 i 49.2 g.

Per les pomes Golden dels Alps es fa un tercer estudi. Es tria també una mostra de 30 pomes Golden dels Alps per estudiar si la diferència de mitjanes amb les pomes Fuji i s'ajuden de R per fer-ne l'anàlisi estadístic d'on s'obté el següent output:

```
Two Sample t-test
data:  Fuji and GoldenA
t = -0.0374438297, df = 58, p-value = 0.970259708
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -8.07587351713  7.77928920020
```

7. Indica'n l'IC i interpreteu-ne el resultat (1 punt)

L'interval amb el 95% de confiança és (-8.08, 7.78). Amb el 95% de confiança, és versemblant considerar que la diferència entre mitjanes de les pomes Fuji i les pomes Golden dels Alps poden arribar a uns 8 g (des de 7.8 grams més les Golden dels Alps que les Fuji fins a 8.1 grams menys).

8.- Per acabar d'engegar la venta per internet es vol també estudiar la proporció de pomes naturalment imperfectes segons el tipus. Per començar, s'ha fet un estudi escollint un mostra de 50 pomes Fuji, entre les quals se n'han trobat 3 de naturalment imperfectes. Per altra banda, entre les 60 pomes Golden se n'han comptat 6 de naturalment imperfectes. Calculeu l'interval de confiança per a la diferència de les proporcions amb el **90 %** de confiança i interpreteu-ne el resultat. (1.5 punts)

P1= 3/50 = 0.06 P2= 6/60=0.1

n1= 50 n2= 60

$se = \sqrt{\frac{P1\cdot(1-P1)}{n1} + \frac{P2\cdot(1-P2)}{n2}} = \sqrt{\frac{0.06\cdot 0.94}{50} + \frac{0.1\cdot 0.9}{60}} = 0.0513$

$IC(\pi_1 - \pi_2, 95\%) = ((P1-P2) - z_{1-\alpha/2} \cdot se, (P1-P2) + z_{1-\alpha/2} \cdot se) = (0.06-0.1 - 1.645\cdot 0.0513, 0.06-0.1 + 1.645\cdot 0.0513) = (-0.1244, 0.04439)$ (usant `qnorm(0.95)=1.645`)

Amb el 90% de confiança és versemblant considerar que la proporció de pomes Fuji en mal estat és la mateixa que de pomes Golden

Valors que poden ser útils pels blocs C i D:

qt(0.975,28)= 2.048	qt(0.975,55)= 2.004	qt(0.975,98)= 1.985	qchisq(0.025,28)= 15.308	qnorm(0,85)= 1,036
qt(0.975,29)= 2.045	qt(0.975,56)= 2.003	qt(0.975,99)= 1.984	qchisq(0.025,29)= 16.047	qnorm(0,9)= 1,036
qt(0.975,30)= 2.042	qt(0.975,57)= 2.003	qt(0.975,100)= 1.984	qchisq(0.025,30)= 16.791	qnorm(0,95)= 1,645
qt(0.975,31)= 2.040	qt(0.975,58)= 2.002	qt(0.975,198)= 1.972	qchisq(0.975,28)= 44.461	qnorm(0,975)= 1,960
qt(0.975,32)= 2.037	qt(0.975,59)= 2.001	qt(0.975,199)= 1.972	qchisq(0.975,29)= 45.722	qnorm(0,99)= 2,326
qt(0.975,33)= 2.035	qt(0.975,60)= 2.000	qt(0.975,200)= 1.972	qchisq(0.975,30)= 46.979	qnorm(0,995)= 2,576

NOM:__________________________COGNOM:____

Problema 2. Bloc D

Tots els apartats valen 1 punt excepte 4 i 7 que valen 1.5pts.

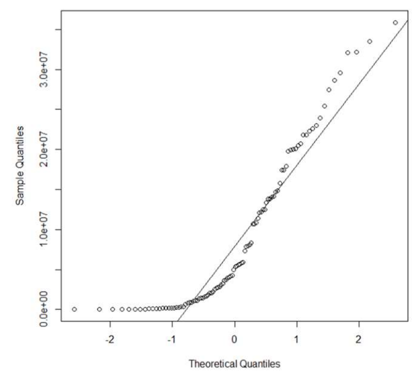
L'algorisme estàndard per multiplicar matrius té un cost de O(M^3), on M és el nombre de files/columnes. A la dècada dels 1960, Volker Strassen va presentar un algorisme amb cost O($M^{log_2 7}$). Uns estudiants volen comparar empíricament els dos algorismes. Han generat matrius quadrades de mida aleatòria M entre 256 i 2048, amb valors obtinguts de la instrucció de R `rnorm()`, i han multiplicat cada matriu per sí mateixa amb els 2 algorismes. Han repetit el procediment n=100 vegades. Han pres el temps, per cada algorisme (estàndard: "ntime", Strassen: "stime"), en cada producte de matrius en microsegons (10^{-6} s).

1. Quins són els elements, o unitats, de la població objectiu de l'estudi? Com són les observacions de la mostra? Podem considerar que el requisit de mostra a l'atzar es compleix, i perquè sí, o perquè no?

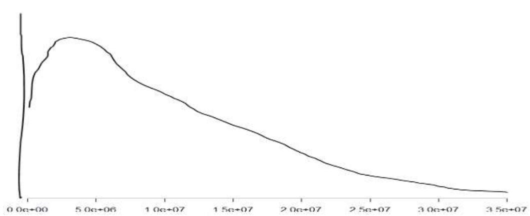
La població objectiu està composada de matrius quadrades, de dimensions entre 256 i 2048.
La mostra estarà formada per parells d'observacions de temps, un de cada algoritme.

Aquí podem dir que potser les matrius amb valors d'una distribució Normal no representen a qualsevol matriu. També podem dir que el producte d'una matriu per sí mateixa pot ser una experiència diferent d'un producte matricial general. O que el rang utilitzat és massa restrictiu (encara que és correcte prendre les dimensions a l'atzar). O que no sabem si sempre calculem primer un algoritme i després l'altre, i que això no seria correcte.

2. Els estudiants han fet el gràfic de la dreta utilitzant la diferència ntime–stime.
   A) Expliqueu què han fet, què pretenen comprovar i amb quin objectiu.
   B) Interpreteu el gràfic.
   C) Dibuixeu com seria l'histograma d'aquestes dades.



A) És un qqplot, serveix per verificar si les dades provenen d'una distribució Normal. Aquesta pot ser una premissa necessària per el desenvolupament de determinat model.
B) La diferència ntime-stime no segueix el model Normal, la part de l'esquerra no segueix la típica cua de la Normal.
C) És important recalcar l'asimetria cap a la dreta:



3. En el context de l'estudi anterior, comenteu les diferències entre tenir un efecte en termes additius o en termes multiplicatius.

En termes additius, l'efecte seria equivalent a una diferència constant de temps entre algoritmes: per a qualsevol matriu, canviar d´algoritme s'hauria de traduir en un canvi constant en el temps esperat.
En canvi, en termes multiplicatius, veuríem que per qualsevol matriu, el canvi absolut no seria constant, dependria de la dimensió de la matriu; però si notaríem que l'increment relatiu seria sempre el mateix.

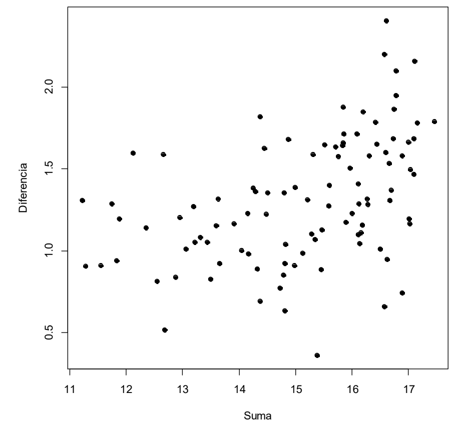
4. A partir de la següent sortida de R indiqueu quin és el paràmetre analitzat, quant val la seva estimació i el seu error o incertesa (i construïu un IC al 95% de confiança), i treieu-ne la conclusió

```
lm(formula = log(ntime) - log(stime) ~ 1)
Residuals:
Min    1Q     Median 3Q     Max
-0.409 -0.182 0.025  0.154  0.435
Coefficient:   Estimate    Std. Error    t value
(Intercept)     0.50192      0.02182       23.00
Residual standard error: 0.2182 on 99 degrees of freedom
```

El parametre és μ, la mitjana de log(ntime) – log(stime) ≡ log(ntime/stime).
Confusió habitual: dir que el paràmetre és log(ntime) – log(stime) (això és una variable)

S'estima amb la mitjana mostral, que val 0.50192; l'error tipus de l'estimació és 0.02182. Amb aquesta informació podem trobar un IC: 0.50192 ± $t_{99, 0.975}$ ×0.02182. Podem utilitzar el quantil exacte o, com a primera aproximació, el quantil d'una Normal estàndard (1.96).
0.50192 ± $t_{99, 0.975}$ ×0.02182 = 0.50192 ± 1.984 ×0.02182 = (0.4586, 0.5452)
Llavors, d'aquí es pot arribar a la conclusió de que la mitjana del rati de temps estarà entre 1.58 i 1.72, amb un 95% de confiança. L'algoritme estàndard serà entre un 58% i un 72% més lent.
Compte: els logaritmes són neperians, cal fer la inversa amb exp(0.4586), exp(0.5452)

5. Interpreteu el grafic Bland-Altman de les diferencies “log(ntime) – log(stime)” en front de *Suma* = “[log(ntime) + log(stime)]/2”.



Les diferències són sempre positives (estàndard sempre triga més que Strassen), però la diferencia creix sensiblement quan anem a la dreta, amb *Suma* major, és a dir, quan els temps són més grans (i les matrius també).
Per aquesta raó està justificat modelar la resposta amb el logaritme de M i no només estimar la diferencia Mitjana (com a la pregunta 4).

6. A partir de la següent sortida de R, digueu quin és el model estadístic que volem aplicar; expliciteu quines són les variables que hi intervenen i amb quin paper cadascuna d’elles; i digueu també quins són i què signifiquen els paràmetres del model. *No contesteu aquí amb resultats numèrics (llegiu la següent pregunta)*

```
lm(formula = (log(ntime) - log(stime)) ~ log(M))
Residuals:
 Min       1Q       Median       3Q      Max
-0.9694  -0.2346    0.0038     0.2287   0.955
Coefficients:Estimate      Std. Error    t value
(Intercept)  -0.85608       0.43936      -1.948
log(M)        0.31271       0.06331       4.940
Residual standard error: 0.3486 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1993,    Adjusted R-squared:  0.1912
```

El model: log(ntime) – log(stime) ≡ log(ntime/stime) = $\beta_0 + \beta_1 \log M + \epsilon$
La resposta o variable dependent és el logaritme del rati de temps dels productes fets amb els dos algoritmes.
La variable explicativa és el logaritme de la mida de la matriu que es multiplica.
Veiem si hi ha una relació lineal entre la resposta i log(M). Per això, els paràmetres són: β_0, intersecció de la recta amb l’eix de les Y; i β_1, pendent de la recta, o quant creix la Y si la X augmenta en una unitat.
El tercer parámetre és σ, la desviació tipus del soroll ϵ. *(oblidat quasi sempre)*

7. A partir *dels resultats* de l’anterior sortida de R, indiqueu els valors estimats pels paràmetres, amb les respectives mesures d’incertesa, i interpreteu.

Terme independent: -0.85608 (error tipus, 0.44), el log del rati ntime/stime quan log(M)=0 (o M=1). Si extrapolem per aquest valor (perquè el valor mínim de M és 256 a l’estudi), la mitjana del rati seria 0.425, ntime sembla millor. Compte perquè l’IC és molt ampli: mitjana entre 0.178 i 1.016.

Pendent: 0.31271 (error tipus, 0.063); quan log(M) augmenta en 1, o quan la dimensió M es multiplica per 2.718, el log del rati augmenta 0.313 (o el rati s’incrementa un 37%): ntime va perdent eficiència.

Desviació residual: 0.3486; és la mesura de la incertesa del log del rati per una M determinada (és rellevant).

8. Interpreteu el R^2 del model de l’anterior sortida de R
El 20% de la variabilitat en la diferència dels logaritmes dels temps es pot explicar per la mida de les matrius M o, més precisament, pel logaritme de M.

9. Utilitzeu el model de l’anterior sortida de R per obtenir una predicció per a multiplicar matrius de mida 1000 i de mida 2000, i expliqueu què heu obtingut.
Log(1000) = 6.907755; log(2000) = 7.600902
Estimacions puntuals:
-0.85608 + 0.31271* 6.907755 = 1.304044; exp() = 3.684
-0.85608 + 0.31271*7.600902 = 1.520798; exp() = 4.576
El valor 3.684 ens diu que l’algorisme estàndard triga 3.684 vegades més que el de Strassen amb matrius de mida 1000, però si són de mida 2000 el estàndard triga 4.576 vegades més.
La ratio creix amb la M, aproximadament com $M^{0.3127}$. Teòricament, M elevat $\log_2 8/7$ = 0.193.